Stokesov izrek in njegova uporaba v relativnosti

Žan Grad

13. januar 2021

Povzetek

Predstavljen je dokaz Stokesovega izreka in njegova uporaba v splošni teoriji relativnosti (posplošen Gaussov izrek na psevdo Riemannovi mnogoterosti). Potrebno predznanje so osnovni pojmi teorije gladkih mnogoterosti, med drugim tudi vnanji produkt, diferencialne forme in vnanji odvod.

Integral diferencialne forme lahko na mnogoterosti naravno definiramo, če je naša forma enake dimenzije kot mnogoterost – taki diferencialni formi rečemo *vrhnja forma* (ang. *top form*). Najprej si oglejmo primer, ko je naša mnogoterost vložena v evklidski prostor iste dimenzije (npr. enotska krogla ali kocka v $\mathbb{R}^k$) – tam zgolj "izbrišemo kline", ki ustrezajo vnanjemu produktu.

Definicija 1. *Integral k-forme $\omega \in \Omega^k(P)$ na gladki k-podmnogoterosti $P \subset \mathbb{R}^k$* je

$$\int_P \omega := \int_P f \, \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^k$$

kjer je $f \in C^\infty(P)$ enolično določena funkcija na P, da velja $\omega = f \, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k$.

To definicijo lahko še nekoliko posplošimo.

Definicija 2. Naj bo M gladka mnogoterost in $P \subset \mathbb{R}^k$ gladka k-podmnogoterost. *Integral k-forme $\omega \in \Omega^k(M)$ vzdolž gladke preslikave $f \in C^\infty(P, M)$* je

$$\int_f \omega := \int_P f^* \omega.$$

Naslednja trditev pravi, da je zadnja definicija neodvisna od parametrizacije mnogoterosti P, pri čemur pa moramo paziti na njeno orientacijo.

Trditev 1. *Naj bo $\varphi \colon Q \to P$ difeomorfizem med povezanima k-podmnogoterostima v $\mathbb{R}^k$ in M n-mnogoterost. Če je $\omega \in \Omega^k(M)$ in $f \in C^\infty(P, M)$, potem velja*

$$\int_{f \circ \varphi} \omega = \mathrm{sgn}(\det \mathrm{d}\varphi) \int_f \omega.$$

Dokaz. Po definiciji imamo

$$\int_{f \circ \varphi} \omega := \int_Q (f \circ \varphi)^* \omega = \int_Q \varphi^*(f^* \omega),$$

kjer zadnji enačaj sledi iz identitete $(f \circ \varphi)^* \omega = \varphi^*(f^* \omega)$, v katero se je enostavno prepričati z definicijo povleka diferencialne forme. Če označimo $\eta = f^* \omega \in \Omega^k(P)$, moramo zdaj dokazati

$$\int_Q \varphi^* \eta = \operatorname{sgn}(\det \mathrm{d}\varphi) \int_P \eta, \tag{1}$$

saj je $\int_P \eta = \int_P f^* \omega =: \int_f \omega$. Če zapišemo $\eta = g \, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k$ (kjer z $x^1, \ldots, x^k$ označujem standardne koordinate na $\mathbb{R}^k$), potem po formuli za povlek k-forme v lokalnih koordinatah [1, Trditev 14.20] sledi

$$\varphi^* \eta = \varphi^*(g \, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k) = (g \circ \varphi)(\det(\mathrm{d}\varphi)) \, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k$$

in torej

$$\begin{aligned}
\int_Q \varphi^* \eta &= \int_Q (g \circ \varphi)(\det(\mathrm{d}\varphi)) \, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k \\
&= \int_Q (g \circ \varphi)(\det(\mathrm{d}\varphi)) \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^k \\
&= \operatorname{sgn}(\det(\mathrm{d}\varphi)) \int_Q (g \circ \varphi) \, |\det(\mathrm{d}\varphi)| \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^k \\
&= \operatorname{sgn}(\det(\mathrm{d}\varphi)) \int_P g \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^k = \operatorname{sgn}(\det(\mathrm{d}\varphi)) \int_P \eta,
\end{aligned}$$

kjer smo v predzadnji vrstici upoštevali povezanost P in Q (tedaj je $\det(\mathrm{d}\varphi)$ povsod enako predznačena), v zadnji pa smo se sklicali na izrek o menjavi spremenljivk v običajnem k-ternem integralu. □

Zdaj smo pripravljeni na definicijo integrala vrhnje forme na dani mnogoterosti. Definicija je nekoliko abstraktna, saj si pri njej pomagamo s t.i. razčlenitvijo enote na mnogoterosti (gre za pogosto uporabljeno orodje v teoriji gladkih mnogoterosti). Spomnimo, da rečemo družini gladkih funkcij $\{f_\lambda \colon M \to [0,1] \; ; \; \lambda \in \Lambda\}$ *razčlenitev enote, podrejena odprtemu pokritju* $\{U_\lambda \; ; \; \lambda \in \Lambda\}$ *gladke mnogoterosti* M, če zanjo velja

1. f_λ je ničelna zunaj U_λ. Natančneje, *nosilec* $\operatorname{supp} f_\lambda := \overline{f_\lambda^{-1}(0,1]}$ *funkcije* f_λ mora biti vsebovan v U_λ.
2. Vsaka točka $p \in M$ ima tako odprto okolico $V \subset M$, na kateri je največ končno mnogo funkcij f_λ neničelnih. Rečemo, da je družina nosilcev $\{\operatorname{supp} f_\lambda \; ; \; \lambda \in \Lambda\}$ *lokalno končna.*
3. Za vsako točko $p \in M$ velja $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(p) = 1$ (opomnimo, da je ta vsota končna zaradi pogoja 2).

Taka razčlenitev na dani gladki mnogoterosti vedno obstaja [1, Izrek 2.23] in je neenolično določena; njena konstrukcija je nekoliko tehnična in nam za to razpravo ne koristi, zato naj si jo radovedni bralec pogleda sam.

Definicija 3. *Integral vrhnje forme $\omega \in \Omega^n(M)$ po orientirani* gladki n-mnogoterosti M je*

$$\int_M \omega := \sum_n \int_{\varphi_n^{-1}} f_n \omega,$$

*Mnogoterost je *orientabilna*, če na njej obstaja tak atlas, da ima Jacobian vsake prehodne preslikave v njem pozitivno determinanto. Je orientirana, če v maksimalnem atlasu izberemo ravno takšen podatlas (vsaka orientabilna mnogoterost ima natanko dve orientaciji).

kjer je $\{(V_n, \varphi_n)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ poljuben števen orientiran atlas na M in $(f_n)_n$ poljubna podrejena razčlenitev enote.

Trditev 2. *Če ima vrhnja forma $\omega \in \Omega^n(M)$ na gladki mnogoterosti M kompakten nosilec, potem je njen integral $\int_M \omega$ neodvisen od izbire gladkega orienterianega atlasa in podrejene razčlenitve enote.*

Dokaz. Vrhnja forma ω ima po predpostavki kompakten nosilec, tj. množica

$$\operatorname{supp}\omega := \overline{\{p \in M\ ;\ \omega_p \text{ je neničelna}\}}$$

je kompakt, zato ga lahko pokrijemo s končno mnogo (npr. N) kartami. Torej privzemamo končnost kartnega pokritja $\{(V_n, \varphi_n)\ ;\ n = 1, \ldots, N\}$ za $\operatorname{supp}(\omega)$ in posledično tudi končnost razčlenitve enote $(f_n)_n$, ki mu je podrejena. Naj bo $\{(\tilde{V}_k, \tilde{\varphi}_k)\ ;\ k = 1, \ldots, K\}$ še eno končno kartno pokritje, ki določa isto orientacijo[†] kot $\{(V_n, \varphi_n)\ ;\ n = 1, \ldots, N\}$, in naj bo $(\tilde{f}_k)_k$ razčlenitev enote, ki mu je podrejena. Dokazujemo

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{\varphi_n^{-1}} f_n \omega = \sum_{k=1}^{K} \int_{\tilde{\varphi}_k^{-1}} \tilde{f}_k \omega.$$

Za člen iz vsote na levi velja

$$\int_{\varphi_n^{-1}} f_n \omega := \int_{\varphi_n^{-1}} \left(\sum_k \tilde{f}_k \right) f_n \omega = \sum_k \int \tilde{f}_k f_n \omega,$$

kjer smo vsoto in integral lahko zamenjali zaradi končnosti vsote (podobno bi to lahko storili v primeru absolutno konvergentne vrste, kar bi ustrezalo primeru, ko forma ω nima nujno kompaktnega nosilca). Torej imamo

$$\sum_n \int_{\varphi_n^{-1}} f_n \omega = \sum_{n,k} \int_{\varphi_n^{-1}} \tilde{f}_k f_n \omega$$

in če isto storimo še z desno stranjo, dobimo

$$\sum_k \int_{\tilde{\varphi}_k^{-1}} \tilde{f}_k \omega = \sum_{k,n} \int_{\tilde{\varphi}_k^{-1}} \tilde{f}_k f_n \omega.$$

Če dokažemo, da velja

$$\int_{\varphi_n^{-1}} \tilde{f}_k f_n \omega = \int_{\tilde{\varphi}_k^{-1}} \tilde{f}_k f_n \omega,$$

bo s tem dokazano željeno. Najprej opazimo, da velja $\operatorname{supp}(\tilde{f}_k f_n \omega) \subset V_n \cap \tilde{V}_k$. Dokazujemo torej, da za poljubno k-formo η na k-mnogoterosti M, za katero velja $\operatorname{supp}(\eta) \subset U \cap V$ za dani karti (U, ϕ) in (V, ψ), velja $\int_{\phi(U)} \phi^* \eta = \operatorname{sgn}(\det(\mathrm{d}(\phi \circ \psi^{-1}))) \int_{\psi(V)} \psi^* \eta$. Imamo

$$\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \eta = \int_{\phi(U \cap V)} (\phi^{-1})^* \eta$$

[†] To pomeni, da velja $\det \mathrm{d}(\tilde{\varphi}_k \circ \varphi_n^{-1}) > 0$ za vsaki dve karti $\tilde{\varphi}_k$ in φ_n.

in če označimo $P = \phi(U \cap V)$ in $Q = \psi(U \cap V)$ ter $\varphi = \phi \circ \psi^{-1} \colon Q \to P$, iz enačbe (1) v dokazu trditve 1 sledi

$$\begin{aligned}
\int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \eta &= \operatorname{sgn}(\det(\mathrm{d}\varphi)) \int_{\psi(U\cap V)} \varphi^* \left((\phi^{-1})^* \eta\right) \\
&= \operatorname{sgn}(\det(\mathrm{d}\varphi)) \int_{\psi(U\cap V)} (\psi^{-1})^* \phi^* (\phi^{-1})^* \eta \\
&= \operatorname{sgn}(\det(\mathrm{d}\varphi)) \int_{\psi(U\cap V)} (\psi^{-1})^* \eta \\
&= \operatorname{sgn}(\det(\mathrm{d}\varphi)) \int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^* \eta.
\end{aligned}$$

Če torej zdaj vzamemo $\eta = \tilde{f}_k f_n \omega$ in $(U, \phi) = (V_n, \varphi_n)$ ter $(V, \psi) = (\tilde{V}_k, \tilde{\varphi}_k)$, iz enake orientiranosti atlasov sledi željeno. $\square$

Opomba 1. V dokazu lahko opazimo, da bi namesto kompaktnosti nosilca forme ω lahko zahtevali, da je vrsta

$$\sum_n \int_{\varphi_n^{-1}} f_n \omega$$

absolutno konvergentna za poljubno izbiro $\{(V_n, \varphi_n)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ števnega orientiranega atlasa na M in podrejene razčlenitve enote $(f_n)_n$. V tem primeru rečemo, da je forma ω *integrabilna.*

Opomba 2. Če je ω *volumska forma* na orientirani n-mnogoterosti M (tj. povsod neničelna n-forma, ki se na vsakem orientiranem ogrodju izvrednoti v pozitivno število), lahko definiramo *integral gladke funkcije* $f \in C^\infty(M)$ kot

$$\int_M f := \int_M f\omega.$$

Pripomnimo, da je izbira volumske forme na M do predfaktorja pozitivne funkcije natanko ekvivalentna izbiri orientacije za M [1, Trditev 15.5].

V praksi imamo pogosto na orientirani (psevdo) Riemannovi n-mnogoterosti (M, g) enolično določeno *(psevdo) Riemannovo volumsko formo* ω (tj. tako n-formo, ki se na vsakem orientiranem (psevdo) ortonormiranem ogrodju izvrednoti v ena). Naj bo $(U, \varphi = (x^\mu))$ lokalna karta na M. V primeru, ko je U gosta v M ali pa velja $\operatorname{supp} f \subset U$, velja

$$\int_M f = \int_{\varphi^{-1}} f\omega = \int_{\varphi(U)} f(x) \sqrt{|\det g(x)|}\, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n,$$

saj se (psevdo) Riemannova volumska forma v lokalnih koordinatah izraža kot

$$\omega = \sqrt{|\det g|}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Ta formula za Riemannovo volumsko formo sledi po podobnem razmisleku kot v [1, Trditev 15.31].

1 Integracija na verigah

Za dokaz Stokesovenga izreka potrebujemo nekaj enostavnih konceptualnih pripomočkov iz algebraične topologije, zato najprej naredim kratek uvod, ki lahko služi tudi kot prvo srečanje s pojmom homologije. V nadaljevanju označujemo $I = [-1, 1]$.

Definicija 4. *Gladka k-kocka v M* je gladka preslikava $\sigma\colon I^k \to M$. Naj bo $C_k(M;\mathbb{R})$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, generiran z bazo gladkih k-kock; imenujemo ga *prostor gladkih k-verig. Gladka k-veriga na M* je element prostora $C_k(M;\mathbb{R})$, tj. linearna kombinacija gladkih k-kock.

Definicija 5. *Robni homomorfizem k-verig* je preslikava $\partial_k\colon C_k(M;\mathbb{R}) \to C_{k-1}(M;\mathbb{R})$, dana na bazi gladkih k-kock kot

$$\partial_k(\sigma) := \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}(\sigma_i^+ - \sigma_i^-),$$

kjer je $\sigma_i^\pm := \sigma_i \circ \rho_i^\pm$ in je preslikava $\rho_i^\pm\colon I^{k-1} \to I^k$ dana s predpisom $\rho_i^\pm(x_1, \ldots, x_{k-1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \pm 1, \ldots, x_{k-1})$.

Opomba 3. Homomorfizem ∂_k smo definirali za poljuben k. Ponavadi indeks k izpuščamo in ga razberemo iz konteksta. Dano preslikavo iz $C_k(M;\mathbb{R})$ v nek vektorski prostor ponavadi definiramo na gladkih k-kockah in potem razširimo po linearnosti.

Trditev 3.

i) $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$.

ii) *Za $f \in C^\infty(M, N)$ velja $f_* \circ \partial = \partial \circ f_*$, kjer je $f_*\colon C_k(M;\mathbb{R}) \to C_k(N;\mathbb{R})$ definiran na bazi gladkih k-kock s predpisom $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$; to preslikavo imenujemo potisk vzdolž preslikave f.*

iii) *Za $f \in C^\infty(M, N)$, gladko k-kocko σ in $\omega \in \Omega^k(N)$ velja $\int_\sigma f^*(\omega) = \int_{f_*(\sigma)} \omega$.*

Dokaz.

i) $\partial(\partial\sigma) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}(\partial\sigma_i^+ - \partial\sigma_i^-)$. Po definiciji je

$$\partial\sigma_i^\pm = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \left((\sigma_i^\pm)_j^+ - (\sigma_i^\pm)_j^- \right)$$

in zato

$$\partial(\partial\sigma) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{i+j} \left((\sigma_i^+)_j^+ - (\sigma_i^+)_j^- - (\sigma_i^-)_j^+ + (\sigma_i^-)_j^- \right).$$

Opazimo pa, da za $i \leq j$ velja

$$(\sigma_i^+)_j^+ = (\sigma_{j+1}^+)_i^+, \quad (\sigma_i^+)_j^- = (\sigma_{j+1}^-)_i^+, \quad (\sigma_i^-)_j^+ = (\sigma_{j+1}^-)_i^+, \quad (\sigma_i^-)_j^- = (\sigma_{j+1}^-)_i^-$$

in podobno za $i > j$ velja

$$(\sigma_i^+)_j^+ = (\sigma_j^+)_{i-1}^+, \quad (\sigma_i^+)_j^- = (\sigma_j^-)_{i-1}^+, \quad (\sigma_i^-)_j^+ = (\sigma_j^-)_{i-1}^+, \quad (\sigma_i^-)_j^- = (\sigma_j^-)_{i-1}^-$$

Zato je ob razcepu zgornjega izraza na vsoti

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i \leq j} + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i > j}$$

jasno, da se (i,j)-ti člen v prvi vsoti izniči z $(j+1,i)$-tim členom v drugi. Vsi členi se izničijo, zato je $\partial \circ \partial$ na gladkih k-kockah ničelna, posledično pa tudi na vseh gladkih k-verigah.

ii) Preverjamo $\partial(f_*\sigma) = f_*(\partial\sigma)$ za poljubno k-kocko σ. Imamo

$$\partial(f_*\sigma) = \partial(f\circ\sigma) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\left((f\circ\sigma)_i^+ - (f\circ\sigma)_i^-\right)$$

in po drugi strani

$$f_*(\partial\sigma) = f_*\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}(\sigma_i^+ - \sigma_i^-)\right) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}(f_*\sigma_i^+ - f_*\sigma_i^-),$$

kjer drugi enačaj sledi iz dejstva, da je f_* na gladke verige razširjen po linearnosti. Evidentno pa je $f_*\sigma_i^\pm = f_*\circ\sigma_i\circ\rho_i^\pm = (f\circ\sigma)_i^\pm$, torej smo dokazali željeno.

iii) Po definiciji je

$$\int_\sigma f^*\omega = \int_{I^k}\sigma^* f^*\omega = \int_{I^k}(f\circ\sigma)^*\omega$$

in po drugi strani

$$\int_{f_*\sigma}\omega = \int_{f\circ\sigma}\omega = \int_{I^k}(f\circ\sigma)^*\omega.$$

□

Opomba 4. Množice $C_k(M;\mathbb{R})$ in homomorfizme ∂_k ponavadi predstavimo s t.i. *verižnim kompleksom*

$$\cdots \to C_{k+1}(M;\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(M;\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(M;\mathbb{R}) \to \dots$$

Enakost i) iz trditve je ekvivalentna inkluziji $\operatorname{im}\partial_{k+1} \subset \ker\partial_k$; to pomeni, da lahko definiramo t.i. *homološke grupe* $H_k(M;\mathbb{R}) = \ker\partial_k/\operatorname{im}\partial_{k+1}$.

V točki iii) iz trditve smo imeli opravka z integralom $\int_\sigma \omega$ k-forme na M vzdolž k-kocke σ. Definicijo takšne vrste integrala lahko razširimo na poljubne k-verige, po linearnosti.

Definicija 6. Naj bo M gladka mnogoterost. *Integral k-forme $\omega \in \Omega^k(M)$ po gladki k-verigi $c \in C_k(M;\mathbb{R})$ je*

$$\int_c \omega := \sum_j \alpha_j \int_{\sigma_j}\omega,$$

kjer je $c = \sum_j \alpha_j\sigma_j$ za neke enolično določene koeficiente $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ter gladke k-kocke σ_j.

Izrek 1 (Stokesov, za verige)**.** *Naj bo M gladka mnogoterost, $c \in C_k(M;\mathbb{R})$ in $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$. Potem velja*

$$\int_{\partial c}\omega = \int_c \mathrm{d}\omega.$$

Dokaz. Izrek je po linearnosti dovolj dokazati za k-kocke. Naj bo najprej $M = \mathbb{R}^n, \omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ in $\sigma \in C_k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ gladka k-kocka. Potem je

$$\begin{aligned}\int_{\partial\sigma} \omega &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \left(\int_{I^{k-1}} (\sigma_i^+)^* \omega - \int_{I^{k-1}} (\sigma_i^-)^* \omega \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \left(\int_{I^{k-1}} (\rho_i^+)^* \sigma^* \omega - \int_{I^{k-1}} (\rho_i^-)^* \sigma^* \omega \right) \end{aligned} \tag{2}$$

Po drugi strani,

$$\int_\sigma \mathrm{d}\omega = \int_{I^k} \sigma^*(\mathrm{d}\omega) = \int_{I^k} \mathrm{d}(\sigma^*\omega), \tag{3}$$

kjer smo v zadnjem enačaju uporabili komutiranje vnanjega odvoda in povleka [1, Trditev 14.23]. Dokažimo enakost desnih strani zgornjih dveh enačb. Označimo $\eta = \sigma^*\omega \in \Omega^{k-1}(I^k)$ in BŠS privzamemo $\eta = f\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \ldots \mathrm{d}x^k$ za neko gladko funckijo $f\colon I^k \to \mathbb{R}$ (v splošnem je η vsota večih takih členov, zaradi linearnosti integrala pa lahko privzamemo kar to obliko). Tukaj strešica nad faktorjem v vnanjem produktu označuje izpuščeni faktor. Tedaj za integrande v izrazu (2) velja

$$(\rho_i^\pm)^*(f\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \ldots \mathrm{d}x^k) = \begin{cases} (f \circ \rho_i^\pm)\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \ldots \mathrm{d}x^k & \text{če } i = j, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Res, po formuli za povlek forme v lokalnih koordinatah velja

$$(\rho_i^\pm)^*(f\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k) = (f \circ \rho_i^\pm)\,\mathrm{d}(\mathrm{pr}^1 \circ \rho_i^\pm) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(\widehat{\mathrm{pr}^j \circ \rho_i^\pm}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(\mathrm{pr}^k \circ \rho_i^\pm),$$

kjer je $\mathrm{pr}^\ell\colon I^k \to I$ projekcija na ℓ-to koordinato, torej $\mathrm{pr}^\ell(x^1, \ldots, x^k) = x^\ell$, in imamo

$$\mathrm{pr}^\ell \circ \rho_i^\pm(x^1, \ldots, x^{k-1}) = \mathrm{pr}^\ell(x^1, \ldots, \overbrace{\pm 1}^{i}, \ldots, x^{k-1}) = \begin{cases} x^\ell & \text{če } i \neq \ell \\ \pm 1 & \text{če } i = \ell. \end{cases}$$

Iz tega sledi

$$\begin{aligned}(2) = (-1)^{j+1} &\int_{I^{k-1}} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k)\,\mathrm{d}x^1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x^j} \ldots \mathrm{d}x^k \\ &+ (-1)^j \int_{I^{k-1}} f(x^1, \ldots, -1, \ldots, x^k)\,\mathrm{d}x^1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x^j} \ldots \mathrm{d}x^k.\end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned}(3) &= \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k \\ &= (-1)^{j-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k \\ &= (-1)^{j-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^k \\ &= (-1)^{j-1} \int_{I^{k-1}} \left(\int_{-1}^{1} \frac{\partial f}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \right) \mathrm{d}x^1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x^j} \ldots \mathrm{d}x^k,\end{aligned}$$

kjer smo v zadnjem enačaju uporabili Fubinijev izrek. Zadnji izraz je po osnovnem izreku analize enak (2) zgoraj. S tem je izrek dokazan za $M = \mathbb{R}^n$.

V primeru, ko je M poljubna gladka n-mnogoterost, je slika vsake gladke k-kocke σ kompakt v M. Torej ga pokrijemo s končno mnogo kartami $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ (I je končna množica). Naj bo $(\psi_i)_i$ razčlenitev enote, ki je podrejena temu pokritju mnogoterosti $\cup_i U_i$. Tedaj je

$$\int_\sigma \mathrm{d}\omega = \int_\sigma \sum_i \psi_i \,\mathrm{d}\omega = \sum_i \int_\sigma \psi_i \,\mathrm{d}\omega, \tag{4}$$

integrand pa zdaj želimo zapisati kot $\mathrm{d}(\psi_i\omega)$. To lahko storimo, saj velja $0 = \mathrm{d}(\sum_i \psi_i) = \sum_i \mathrm{d}\psi_i$ in zato tudi $\sum_i \mathrm{d}\psi_i \wedge \omega = 0$, iz česar po formuli za vnanji odvod vnanjega produkta form [1, Trditev 14.23] sledi

$$(4) = \sum_i \int_\sigma (\psi_i \,\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\psi_i \wedge \omega) = \sum_i \int_\sigma \mathrm{d}(\psi_i\omega).$$

Zdaj želimo pokazati, da je vsak od integralov v vsoti enak $\int_{\partial\sigma} \psi_i\omega$, saj potem sledi željeno. Pišimo $\varphi := \varphi_i$ in $\psi := \psi_i$ za dan $i \in I$; potem je

$$\begin{aligned}\int_\sigma \mathrm{d}(\psi\omega) &= \int_\sigma \varphi^*(\varphi^{-1})^* \,\mathrm{d}(\psi\omega) = \int_{\varphi_*\sigma} (\varphi^{-1})^* \,\mathrm{d}(\psi\omega) = \int_{\varphi_*\sigma} \mathrm{d}\big((\varphi^{-1})^*(\psi\omega)\big) \\ &= \int_{\partial(\varphi_*\sigma)} (\varphi^{-1})^*(\psi\omega) = \int_{\varphi_*(\partial\sigma)} (\varphi^{-1})^*(\psi\omega) = \int_{\partial\sigma} \varphi^*(\varphi^{-1})^*(\psi\omega) \\ &= \int_{\partial\sigma} \psi\omega.\end{aligned}$$

Tu smo na prehodu skozi drugi enačaj uporabili trditev 3 (iii), pri četrtem (zgoraj) dokazan izrek za primer $M = \mathbb{R}^n$, pri petem pa trditev 3 (ii). $\square$

Kot zanimivost navedimo naslednjo posledico. Podobno, kot enakost $\partial^2 = 0$ omogoča definicijo homoloških grup, enakost $\mathrm{d}^2 = 0$ [1, Trditev 14.23] na *koverižnem kompleksu*

$$\cdots \to \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_{k-1}} \Omega^k(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_k} \Omega^{k+1}(M) \to \ldots$$

omogoča definicijo t.i. *de Rhamovih kohomoloških grup* $H^k_{dR}(M) := \ker \mathrm{d}_k / \operatorname{im} \mathrm{d}_{k-1}$.

Posledica 1. *Naj bo M gladka mnogoterost. Preslikava $C_k(M;\mathbb{R}) \times \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ dana s predpisom*

$$(c, \omega) \mapsto \int_c \omega$$

inducira dobro definirano preslikavo $H_k(M) \times H^k_{dR}(M) \to \mathbb{R}$, dano s predpisom $([c], [\omega]) \mapsto \int_c \omega$.

Dokaz. Dokazujemo enakost $\int_c \omega = \int_{c'} \omega'$, če velja $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega' = 0$, $\partial c = \partial c' = 0$ in $\omega - \omega' = \mathrm{d}\eta$, $c - c' = \partial\rho$ za neki $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ in $\rho \in C_{k+1}(M;\mathbb{R})$. Velja

$$\int_c \omega - \int_{c'} \omega' = \int_c \omega - \int_{c'} \omega + \overbrace{\int_{c'} \mathrm{d}\eta}^{\int_{\partial c'} \eta = 0} = \int_{c-c'} \omega = \int_{\partial\rho} \omega = \int_\rho \mathrm{d}\omega = 0,$$

kjer zaviti oklepaj in predzadnji enačaj sledita iz Stokesovega izreka za verige. $\square$

Opomba 5. Preslikava iz zadnje trditve je očitno homomorfizem (tj. linearna v obeh argumentih); gre za preslikavo, ki določa izomorfizem med singularno in de Rhamovo kohomologijo (ta rezultat imenujemo de Rhamov izrek).

2 Stokesov izrek na mnogoterostih in njegove posledice

Za dokaz Stokesovega izreka na mnogoterostih potrebujemo še pojem inducirane orientacije na robu ∂M.

Definicija 7. Naj bo M orientirana gladka mnogoterost s pridruženo volumsko formo ω in naj $\partial M \neq \emptyset$. Vektor $v \in T_pM$ (za $p \in \partial M$) je *navzven usmerjen*, če obstaja taka gladka krivulja $\gamma\colon (-\varepsilon, 0] \to M$, da je $\gamma'(0) = v$, in je *usmerjen navznoter*, če obstaja taka gladka krivulja $\gamma\colon [0, \varepsilon) \to M$, da je $\gamma'(0) = v$. *Inducirana orientacija robu* ∂M je tista orientacija mnogoterosti ∂M, ki ustreza volumski formi $\iota_N\omega := \omega(N, \cdot)$, kjer je N poljubno navzven usmerjeno vektorsko polje vzdolž ∂M.

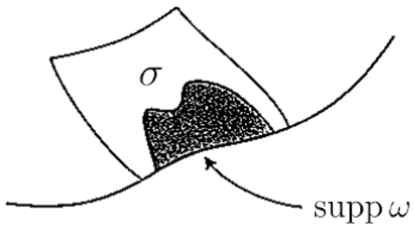
Opomba 6. Ekvivalentno, inducirana orientacija robu je dana z urejeno terico $[N, \partial_1, \ldots, \partial_{n-1}]$, kjer je $(x^\mu)_{\mu=1}^n$ poljubna robna karta iz orientiranega atlasa za M (zadnja koordinata x^n namreč ustreza ravno koordinati, ki je transverzalna na ∂M). Dalje, inducirana orientacija robu ∂M je neodvisna od izbire navzven usmerjenega vektorskega polja N. Res, če je $\tilde{N}$ še eno navzven usmerjeno vektorsko polje, potem imata v dani robni karti $(x^\mu)_\mu$ oba zadnjo komponento negativno (tj. $N^n, \tilde{N}^n < 0$). Prehodna matrika med ogrodjema $[N, \partial_1, \ldots, \partial_{n-1}]$ in $[\tilde{N}, \partial_1, \ldots, \partial_{n-1}]$ ima determinanto enako $N^n/\tilde{N}^n > 0$, zato imata ogrodji enako orientacijo.

Opomba 7. Pomembno dejstvo je, da standardno (normalno) navzven usmerjeno vektorsko polje $-\partial_n$ za zgornji polprostor $\mathbb{H}^n := \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \,;\, x^n \geq 0\}$ z robom $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ določa orientacijo robu. Inducirana orientacija robu $\partial\mathbb{H}^n$ je potem dana s terico $[-\partial_n, \partial_1, \ldots, \partial_{n-1}]$, ta pa je enaka orientaciji $(-1)^n[\partial_1, \ldots, \partial_n]$. Vidimo torej, da je inducirana orientacija za $\partial\mathbb{H}^n$ enaka standardni orientaciji za $\mathbb{R}^{n-1}$, ko je n sod, in inverzna, ko je n lih.

Poglejmo še, kako ravnati v primeru, ko ima forma svoj kompakten nosilec znotraj take n-kocke, ki ima natanko eno lice vsebovano v robu ∂M. Natančneje, σ naj bo *vložena orientirana n-kocka*[‡] v M, za katero velja $\operatorname{im}\sigma \cap \partial M = \operatorname{im}\sigma_n^-$, ω pa naj bo $(n-1)$-forma na M z $\operatorname{supp}\omega \subset \operatorname{im}\sigma$. Potem za ∂M z inducirano orientacijo zaradi prejšnjega odstavka velja

$$\int_{\sigma_n^-} \omega = (-1)^n \int_{\partial M} \omega.$$

Ta rezultat bo pomemben v dokazu Stokesovega izreka na mnogoterostih.



Slika 1: Skica situacije v opombi 7.

Izrek 2 (Stokesov izrek)**.** *Naj bo M orientabilna gladka n-mnogoterost in $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ diferencialna forma s kompaktnim nosilcem. Potem velja*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

[‡]Kocka σ je *orientirana*, če velja $\det \mathrm{d}(\varphi \circ \sigma) > 0$ za poljubno karto φ iz danega orientiranega atlasa na M; je *vložena*, če je difeomorfizem na svojo sliko.

Opomba 8. Pri zapisu te kratke in jedrnate enakosti je treba biti pozoren na interpretacijo desne strani. Forma ω na desni strani je $\mathrm{inc}^*\omega$, kjer je $\mathrm{inc}\colon \partial M \hookrightarrow M$ inkluzija, kar pomeni da je neničelna samo na podsvežnju $T(\partial M)$ svežnja $TM|_{\partial M}$ (tj. neničelna je kvečjemu na linearno neodvisnih $(n-1)$-tericah vektorjev, ki so tangentni na ∂M). Mnogoterost ∂M, po kateri integriramo, je opremljena z inducirano orientacijo $\iota_N \omega_v$, kjer je ω_v volumska forma na M, ki nosi informacijo o naši izbiri orientacije na M.[§]

Dokaz. Ker je $\operatorname{supp}\omega$ kompakt, lahko izberemo končno mnogo kart $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ na M, ki ga pokrijejo; naj bo $(\psi_i)_i$ podrejena razčlenitev enote. Za vsak $i \in I$ velja bodisi $\operatorname{supp}(\psi_i\omega) \subset \operatorname{int} M$ bodisi $\operatorname{supp}(\psi_i\omega)$ seka rob ∂M. Brez škode za splošnost (z morebitno spremembo izbranega atlasa) lahko privzamemo, da v prvem primeru na M obstaja taka vložena orientirana n-kocka σ, da je $\operatorname{supp}(\psi_i\omega) \subset \operatorname{im}\sigma$, v drugem primeru pa taka vložena orientirana n-kocka σ, da poleg $\operatorname{supp}(\psi_i\omega) \subset \operatorname{im}\sigma$ velja še $\operatorname{im}\sigma \cap \partial M = \operatorname{im}\sigma_n^-$. V prvem primeru velja

$$\int_M \mathrm{d}(\psi_i\omega) = \int_\sigma \mathrm{d}(\psi_i\omega) = \int_{\partial\sigma} \psi_i\omega = 0 \quad \text{in hkrati} \quad \int_{\partial M} \psi_i\omega = 0,$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj upoštevali Stokesov izrek za verige. V drugem primeru pa velja

$$\int_M \mathrm{d}(\psi_i\omega) = \int_\sigma \mathrm{d}(\psi_i\omega) = \int_{\partial\sigma} \psi_i\omega = \int_{(-1)^n\sigma_n^-} \psi_i\omega = (-1)^n \int_{\sigma_n^-} \psi_i\omega = (-1)^n(-1)^n \int_{\partial M} \psi_i\omega,$$

kjer smo na prehodu skozi drugi enačaj spet upoštevali Stokesov izrek za verige, na tretjem definicijo ∂ in na zadnjem enakost

$$\int_{\sigma_n^-} \psi_i\omega = (-1)^n \int_{\partial M} \psi_i\omega,$$

ki sledi iz opombe 7. Potem velja

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \sum_i \int_M \psi_i \,\mathrm{d}\omega = \sum_i \int_M \mathrm{d}(\psi_i\omega) = \sum_i \int_{\partial M} \psi_i\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

□

Posledica 2. *Integral vsake sklenjene $(n-1)$-forme ω (tj. take forme, da je $\mathrm{d}\omega = 0$) po robu ∂M poljubne kompaktne mnogoterosti M je ničelen. Integral vsake eksaktne n-forme η (tj. take forme, da je $\eta = \mathrm{d}\omega$ za neko $(n-1)$-formo ω) na vsaki sklenjeni mnogoterosti (tj. kompaktni z $\partial M = \emptyset$) je ničelen.*

Dokaz. Neposredna posledica Stokesovega izreka. □

Preden si ogledamo posledice tega izreka za teorijo relativnosti, si oglejmo par enostavnih posledic. Čeprav smo tekom dokazovanja uporabili osnovni izrek analize, je ta zdaj tudi njegova posledica.

Posledica 3 (Leibnizeva formula)**.** *Za $f \in C^\infty([a,b])$ velja $\int_{[a,b]} \mathrm{d}f = f(b) - f(a)$.*

Dokaz. Uporabimo Stokesov izrek za $M = [a,b]$ na 0-formi $\omega = f$. □

[§] ω_v je nepovezana s formo ω.

Posledica 4 (Integracija po delih)**.** *Za $f, g \in C^\infty([a,b])$ velja*

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}f.$$

Dokaz. Uporabimo Stokesov izrek za $M = [a,b]$ na 0-formi $\omega = fg$. $\square$

Posledica 5 (Greenov izrek)**.** *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ kompaktna ploskev z odsekoma gladkim robom, ki ima orientacijo nasprotne smeri urinega kazalca (torej je D orientirana). Za vsako gladko vektorsko polje (P, Q) na D velja*

$$\int_D (\partial_x Q - \partial_y P)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

Dokaz. Uporabimo Stokesov izrek za $M = D$ na 1-formi $\alpha = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$; velja $\mathrm{d}\alpha = (\partial_x Q - \partial_y P)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. $\square$

Opomba 9. Podobno dokažemo tudi splošnejši Kelvin–Stokesov izrek, ki nam med drugim omogoča tudi identifikacijo diferencialne in integralne oblike Maxwellovih enačb.

3 Uporaba v relativnosti: Gaussov izrek o divergenci na psevdo Riemannovi mnogoterosti

Prišli smo do glavnega izreka v tem članku – v teoriji relativnosti gre za izjemno pomemben izrek, saj se ob sklicevanju nanj lahko znebimo določenih členov pri variacijskem računu, kar nam med drugim omogoča tudi izpeljavo Einsteinovih enačb.

Izrek 3 (Gaussov izrek)**.** *Naj bo (M, g) orientirana psevdo Riemannova mnogoterost in ω_g pridružena psevdo Riemannova volumska forma. Za vsako vektorsko polje X na M s kompaktnim nosilcem velja*

$$\int_M (\operatorname{div} X)\,\omega_g = \int_{\partial M} \langle X, N\rangle\,\omega_\gamma,$$

kjer je $\gamma := \mathrm{inc}^* g = g|_{\partial M}$ inducirana metrika na ∂M in je N normalno vektorsko polje vzdolž ∂M; če je $\langle N, N\rangle = 1$, je N usmerjeno navzven, in če je $\langle N, N\rangle = -1$, je usmerjeno navznoter.

Opomba 10. V robni lokalni karti $(U, \varphi = (x^\mu)_{\mu=1}^n)$ (tj. prvih $n-1$ koordinat opisuje ∂M) to pomeni

$$\int_{\varphi(U)} \nabla_\mu X^\mu \sqrt{|\det g|}\,\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n = \int_{\partial(\varphi(U))} N_\mu X^\mu \sqrt{|\det \gamma|}\,\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^{n-1},$$

kjer je $g = [g(\partial_\mu, \partial_\nu)]_{\mu,\nu=1}^n$ t.i. Gramova matrika za g in $\gamma = [\gamma(\partial_\mu, \partial_\nu)]_{\mu,\nu=1}^{n-1}$ Gramova matrika inducirane metrike.

Zgornji izrek lahko interpretiramo tudi v kontekstu Riemannovih mnogoterosti, kjer za normalno vektorsko polje N vzdolž ∂M velja $\langle N, N\rangle = 1$; z dodatnim pogojem usmerjenosti navzven je N enolično določeno.

Dokaz. Divergenca vektorskega polja je dana z $\operatorname{div} X = \sum_\mu \langle \nabla_\mu X, \partial_\mu \rangle$ oz. ekvivalentno z $(\operatorname{div} X)\omega_g = \mathrm{d}(\iota_X \omega_g)$.¶ V našem dokazu bo ugodneje računati s slednjim izrazom, saj velja

$$\int_M \operatorname{div}(X)\omega_g = \int_M \mathrm{d}(\iota_X \omega_g) = \int_{\partial M} \operatorname{inc}^*(\iota_X \omega_g),$$

kjer smo na prehodu skozi zadnji enačaj uporabili Stokesov izrek. Izračunajmo $\operatorname{inc}^*(\iota_X \omega_g)$; seveda je $\operatorname{inc}^*(\iota_X \omega_g) = (\iota_X \omega_g)|_{\partial M}$, tj. zožitev $(n-1)$ forme $\iota_X \omega_g$ na podsveženj $T(\partial M)$ svežnja $TM|_{\partial M}$. Zaradi enostavnosti bomo pisali kar $\iota_X \omega_g$ in razumeli, da ta forma sprejema samo vektorje, ki so tangentni na ∂M.

Naj bo N navzven usmerjeno normalno vektorsko polje vzdolž ∂M. Naj bosta

$$\begin{aligned} X^\perp &= \alpha N, \\ X^\top &= X - X^\perp \end{aligned}$$

normalna in tangencialna komponenta vektorskega polja X. Velja

$$\langle X, N \rangle = \alpha \langle N, N \rangle = \alpha\sigma, \quad \text{kjer je } \sigma \in \{+1, -1\}.\|$$

Zato je $X = X^\top + \alpha N = X^\top + \sigma \langle X, N \rangle N$ in posledično

$$\iota_X \omega_g = \iota_{X^\top} \omega_g + \sigma \langle X, N \rangle \iota_N \omega_g.$$

Naj bo zdaj $(E_\mu)_{\mu=1}^{n-1}$ orientirano psevdo ortonormirano lokalno ogrodje za ∂M (tj. $\langle E_\mu, E_\mu \rangle \in \{+1, -1\}$ za vsak $\mu = 1, \ldots, n-1$). Potem lahko zapišemo

$$X^\top = \sum_{\mu=1}^{n-1} c^\mu E_\mu$$

za neke gladke funkcije $c^\mu \in C^\infty(\partial M)$. Velja pa

$$(\iota_{X^\top} \omega_g)(E_1, \ldots, E_{n-1}) = \sum_{\mu=1}^{n-1} c^\mu \omega_g(E_\mu, E_1, \ldots, E_{n-1}) = 0,$$

iz česar vidimo, da je $\iota_{X^\top} \omega_g = 0$. Zato je

$$\iota_X \omega_g = \iota_{X^\perp} \omega_g = \sigma \langle X, N \rangle \iota_N \omega_g.$$

Ker je N v vsaki točki iz ∂M navzven usmerjen normalni vektor na ∂M, po definiciji inducirane orientacije na ∂M sledi

$$(\iota_N \omega_g)(E_1, \ldots, E_{n-1}) = \omega_g(N, E_1, \ldots, E_{n-1}) = 1,$$

s pogojem $\omega_\gamma(E_1, \ldots, E_{n-1}) = 1$ (za poljubno psevdo ortonormirano lokalno ogrodje $(E_\mu)_{\mu=1}^{n-1}$) pa je psevdo Riemannova volumska forma ω_γ na ∂M enolično določena, zato velja $\omega_\gamma = \iota_N \omega_g$. Posledično imamo

$$\int_M \operatorname{div}(X)\, \omega_g = \int_{\partial M} \operatorname{inc}^*(\iota_{X^\perp} \omega) = \sigma \int_{\partial M} \langle X, N \rangle \iota_N \omega_g = \int_{\partial M} \langle X, \sigma N \rangle \omega_\gamma.$$

Vektorsko polje N je usmerjeno navzven, zato je $-N$ usmerjeno navznoter; v primeru $\sigma = -1$ torej sledi, da je σN usmerjeno navznoter. To dokazuje željeno. $\square$

¶Divergenco vektorskega polja X fiziki zapišejo kot $\nabla_\mu X^\mu$. Za dokaz omenjene ekvivalence glej [1, Trditev 15.31] – tam je ekvivalenca dokazana v kontekstu Riemannovih mnogoterosti, enostavno pa jo je posplošiti v kontekst psevdo Riemannovih mnogoterosti.

‖Pripomnimo, da je $\sigma = 1$ natanko tedaj, ko je ∂M psevdo Riemannova $(n-1)$-mnogoterost in $\sigma = -1$ natanko tedaj, ko je ∂M Riemannova $(n-1)$-mnogoterost.

Literatura

[1] John M Lee. “Introduction to Smooth Manifolds”. V: Springer, 2013.